

SUPERFICI MINIME E
CONGETTURA DI DE GIORGI

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Alcune considerazioni sulle superfici minime	10
2	Soluzioni classiche dell'equazione di superficie minima	11
3	Il teorema di Bernstein (caso $n = 2$)	20
4	La congettura di De Giorgi (caso $n = 2$)	25
5	Problema isoperimetrico	30
5.1	Soluzione del problema isoperimetrico secondo Steiner.	30
5.2	Soluzione del problema isoperimetrico secondo Hurwitz	36
5.3	Dimostrazione secondo Cabré	39
6	Appendice	44
6.1	Teorema di Ascoli-Arzelà	44
6.2	Diffeomorfismo locale e alcune considerazioni sulle forme differenziali	45
6.3	Formula di Gauss-Green	46
6.4	Diseguaglianza di Bessel	48

1 Introduzione

In questo elaborato si sono analizzate le *superficie minime*, si sono date una dimostrazione completa del *Problema di Bernstein* e della *Congettura di De Giorgi* in dimensione due, e si è discusso il *problema isoperimetrico* in tre modi differenti, dando due dimostrazioni valide in dimensione due e una valida in tutte le dimensioni.

Nella prima parte, seguendo [GE84], abbiamo esaminato il *funzionale area* $A(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx$ e il *problema di Dirichlet* ad esso associato, ovvero quello di trovare la funzione u che minimizza il funzionale area, con valore a bordo dato φ . Abbiamo anzitutto discusso il problema dell'*esistenza* di un tale minimo. Questo problema, apparentemente banale, necessita lo sviluppo di alcune tecniche piuttosto sofisticate al fine di compensare delicate perdite di compattezza. Infatti, si è dovuto anzitutto restringere la minimizzazione a insiemi di funzioni lipshitziane: in questo modo si ottiene una soluzione al problema di minimo vincolato grazie al teorema di Ascoli-Arzelà. Si mostra poi che se tale minimo vincolato possiede costante di Lipshitz più piccola di quella richiesta a priori, allora è un minimo libero (un minimo vincolato che non tocca il vincolo è libero!).

Al fine di ottenere minimi liberi in casi concreti, si cercano poi condizioni sotto le quali si possa applicare questa strategia di “svincolare il minimo vincolato”. Per questo, definiremo delle *sopra* e *sottosoluzioni* ed enunceremo un *Principio del massimo*. Si osserverà che molte stime possono essere “ridotte al bordo”. Ad esempio, nella stima della costante di Lipshitz, ci si può ridurre a considerare $|u(x) - u(y)|$ quando y appartiene al bordo. Inoltre, definendo poi le *barriere superiore* ed *inferiore*, si scoprirà che le soluzioni dell'equazione di superfici minime raggiungono massimo e minimo al bordo.

Ciò porterà all'esistenza del minimo libero (Teorema 2.1) in presenza di barriere: l'esistenza delle *barriere* permette una stima a priori della costante di Lipschitz, la quale a sua volta garantisce l'esistenza di superfici minime.

Questo teorema si applica in casi concreti, in quanto bordi lisci ammettono barriere (e quindi ammettono superfici minime fissato un dato al bordo sufficientemente regolare!): l'idea per costruire tali barriere è di partire dal dato al bordo, muovendosi ortogonalmente

verso l'interno in modo sufficientemente ripido (al fine di essere sopra o sotto la nostra soluzione candidata) e in modo sufficientemente concavo o convesso (al fine di essere una sopra o sottosoluzione).

Legato alle superfici minime è il *Problema di Bernstein*, secondo il quale le uniche soluzioni intere dell'equazione di superfici minime nel piano, sono le *funzioni affini* $u(x) = \langle a, x \rangle + b$, ovvero le costanti e i polinomi di primo grado.



Sergei Bernstein

Sorprendentemente, per quanto apparentemente intuitivo, un tale risultato è vero solo in dimensione bassa! Infatti, vale solo per funzioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{R} con $n \leq 7$ (e ci sono controesempi in dimensione più alta: vedi [BDGG]). La dimostrazione del risultato in dimensione via via più alte, ha coinvolto lo sforzo di molti dei migliori matematici del secolo (tra cui De Giorgi, Almgren, Fleming e Simon: vedi [FiA04] per una più dettagliata esposizione storica).



Ennio De Giorgi

In questo lavoro presentiamo la dimostrazione completa del Teorema di Bernstein nel caso $n = 2$. La dimostrazione che qui ri-

portiamo segue [NJ57] e utilizza la seguente idea: dall'equazione di superfici minime si definisce una $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^2)$, le cui derivate seconde sono funzioni delle derivate parziali di f (la soluzione dell'equazione di superfici minime). Si verifica che il determinante dell'hessiana di Φ è pari ad 1; da ciò segue che Φ è un polinomio di secondo grado. Infatti, si trova, grazie a questa Φ , un diffeomorfismo del piano in sé, che porta alla definizione di una opportuna funzione olomorfa. Questa funzione è la combinazione delle derivate seconde di Φ . Utilizzando il teorema di Liouville si arriverà a dire che le derivate seconde di Φ sono costanti, quindi lo sono anche le derivate parziali di f , da cui f è affine.

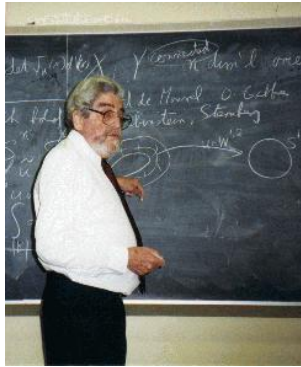
Legata al Problema di Bernstein è la *Congettura di De Giorgi*.



Luis Caffarelli

Questa congettura ci chiede se le soluzioni dell'equazione $\Delta u = u^3 - u$, con $|u| < 1$ e derivata lungo la componente n -ma positiva, abbiano come insiemi di livello $\{u = \lambda\}$, $\forall \lambda > 0$ degli iperpiani, almeno per $n \leq 8$.

La congettura è ancora aperta nella sua generalità. Infatti, nonostante lo sforzo di matematici di primissimo livello, si sono risolti pienamente solo i casi per $n = 2$ (grazie a Berestycki, Caffarelli e Nirenberg [BCN97] e Ghoussoud e Gui [GG98]) e $n = 3$ (grazie a Ambrosio e Cabré [AC00]).



Louis Nirenberg

Per $n \geq 4$, i risultati più promettenti sembrano quelli di [Sa03], dove si dimostra la congettura sotto l'ipotesi ulteriore

$$\lim_{x_n \rightarrow \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1$$

per ogni $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$.



Ovidiu Savin con Craig Evans

Paradossalmente, però, i casi $n = 2, 3$ sono stati risolti sotto ipotesi assai più generali (vedi [AAC01]).

Notiamo che la “dimensione critica” che De Giorgi pone per la sua congettura è $n = 8$, forse per il legame con il problema di Bernstein, secondo il quale ogni grafico minimale di una funzione definita su $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n-1}$ è un iperpiano se $m \leq 7$ ovvero $n \leq 8$.

Ricordiamo che lo studio di questa congettura è legato allo studio di funzionali usati per la fisica (rimandiamo al capitolo 4).

Presentiamo in questo testo la dimostrazione completa nel caso $n = 2$, seguendo un'idea di Farina.



Alberto Farina

La tecnica dimostrativa è la seguente: si parte, per prima cosa, col scrivere in coordinate complesse il gradiente di u (la soluzione dell'equazione a derivate parziali della congettura), da cui si ottiene un'equazione per l'argomento θ . L'ipotesi di monotonia implica che l'argomento è limitato: un teorema di "tipo-Liouville" implica allora che θ è costante. Segue che u è costante lungo la direzione di un vettore prescelto.

L'ultima parte di questo elaborato è dedicata alla soluzione del *problema isoperimetrico*, cioè quello di trovare la curva, di lunghezza data, che racchiude area maggiore (o, in dimensione più alta, l'insieme, di misura al bordo data, che racchiuda il "volume" maggiore). La prima dimostrazione, valida per $n = 2$, affronta il problema da un punto di vista puramente geometrico nel piano, sfruttando il lavoro di Steiner (si veda il paragrafo 5.1).



Jakob Steiner

Per semplicità si considera il *problema di Didone*, che ha come risultato la figura del problema isoperimetrico dimezzata. Da qui si

procede a quella che viene chiamata “manovra di Steiner”, grazie alla quale, con *simmetrizzazioni*, si dimostra che se la soluzione del problema esiste essa è una circonferenza. Se vincoliamo poi la curva ad essere un n -gono, si scoprirà che l' n -gono regolare, tra tutti gli n -goni con perimetro fissato, è quello con area maggiore. Tutto questo utilizza risultati di geometria piana (ad esempio la formula di Erone) e di trigonometria. Si arriva così alla *disuguaglianza isoperimetrica*: $4\pi S(D) \leq L^2(\partial D)$, dove D è un dominio convesso, S la sua area e L la lunghezza della curva ∂D che racchiude D (si ha l'uguaglianza se e solo se D è un cerchio). Per dimostrarla approssimiamo il dominio con un n -gono G_k , che ha k vertici coincidenti con k punti della frontiera di D . Si utilizzano poi i risultati ottenuti per gli n -goni e, passando al limite per $k \rightarrow \infty$ il perimetro e l'area di G_k , si ottiene la tesi.

La seconda dimostrazione del problema isoperimetrico, anch'essa valida in dimensione $n = 2$, utilizza parte della teoria della serie di Fourier (si veda il paragrafo 5.2).

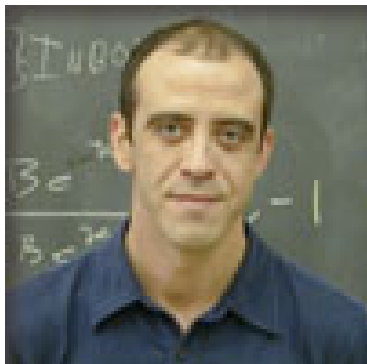


Wilhelm Wirtinger

Per dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica, usiamo un'applicazione della formula di Gauss-Green per il calcolo dell'area di una figura piana, e il risultato del lemma di Wirtinger (Lemma 5.1). Questo lemma sfrutta l'identità di Parseval, e anche in questo caso l'uguaglianza è valida se e solo se la curva, che racchiude il dominio esaminato, è una circonferenza.

La terza – e ultima! – dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica che presentiamo, valida in tutte le dimensioni, è stata accennata a Enrico Valdinoci su un autobus a Torino da Alessio Figalli,

che l'ha a sua volta sentita in un seminario di Xavier Cabré (e tale dimostrazione è in effetti ispirata ad alcune tecniche usate in [CC]).



Xavier Cabré

L'idea di Cabré si svolge come segue. Dopo aver esaminato due lemmi elementari, che esprimono la *disuguaglianza aritmetico-geometrica* e il legame tra la misura della palla e quella del suo perimetro, si considera la soluzione del *problema di Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = c & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = 1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $c := H^{n-1}(\partial\Omega)/L^n(\Omega)$. Si utilizza la tecnica di *muovere un piano* (cioè, $y = \xi \cdot x + \lambda e$ con $|\xi| < 1$) fino al primo punto di contatto da sotto con u . Grazie alla condizione al bordo, tale punto di contatto x_ξ sarà interno ad Ω e quindi il gradiente di u sarà ivi pari a $\nabla u(x_\xi) = \xi$. Da qui segue che la palla unitaria aperta è tutta contenuta nell'insieme dei punti di contatto M . Si nota che il determinante della matrice hessiana di u è non maggiore di $(c/n)^n$, e grazie alla Formula di Coarea si arriva alla tesi della disuguaglianza isoperimetrica, cioè che

$$\frac{H^{n-1}(\partial\Omega)^n}{L^n(\Omega)^{n-1}} \geq \frac{H^{n-1}(\partial B_r)^n}{L^n(B_r)^{n-1}}.$$

Si dimostra inoltre che, se nell'espressione di sopra vale l'uguaglianza, allora $\Omega = B_r(\bar{x})$, cioè la palla è l'unico insieme a ottimizzare la disuguaglianza isoperimetrica. Per vedere ciò si procede in questo modo. Se l'uguaglianza è ottimizzata, la dimostrazione di Cabré conduce a n equazioni differenziali ordinarie. Una volta ricavata la soluzione e calcolata la derivata normale, si arriva a dire che

$B_{n/c}(x_0) \subseteq \Omega$. D'altronde per l'uguaglianza precedente segue la tesi, e quindi $B_{n/c}(x_0) = \Omega$.

1.1 Alcune considerazioni sulle superfici minime

Nonostante sia una questione naturale e, in apparenza, elementare, il problema di trovare le superfici minime, cioè di trovare la superficie di area piú piccola tra quelle limitate da una curva data (o, in dimensione piú alta, da un "bordo" dato), ha ricevuto una soluzione soddisfacente solo in questi ultimi anni. Un caso particolare di questo problema è quello in cui chiediamo che la nostra superficie sia il grafico di una funzione $u(x)$ definita in un insieme aperto Ω . Tali superfici vengono chiamate *superfici minime non parametriche*. Ricordiamo che se $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione regolare, l'area del suo grafico sarà

$$A(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx$$

e perciò, per la stretta convessità di $\sqrt{1 + |Du|^2}$ (si veda [FiA04]), u minimizza l'area se e solo se è una soluzione dell'equazione di superficie minima

$$D_i \left[\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right] = 0 \quad \text{in } \Omega$$

o piú brevemente

$$\operatorname{div} T(u) = 0; \quad T(u) = Du(1 + |Du|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

2 Soluzioni classiche dell'equazione di superficie minima

Studieremo ora alcune proprietà di confronto di opportune *sopra* e *sottosoluzioni* che porteranno a un risultato di esistenza di superfici minime (vedi Teorema 2.1): per prima cosa dimostreremo l'esistenza sotto il vincolo di lipschitzianità (Proposizione 2.1); passeremo poi a riduzioni di stime puntuali al bordo (Lemmi 2.2, 2.3 e 2.4) e successivamente alla definizione di barriere (*superiore ed inferiore*) dalle quali seguirà l'esistenza del minimo libero (si veda [GE84]).

Sia $u(x)$ una funzione definita in un insieme aperto Ω di \mathbf{R}^n . L'area del suo grafico è dato da

$$A(u, \Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx \quad (1)$$

dove $Du = (D_1u, D_2u, \dots, D_nu)$ è il gradiente di u . Supporremo che il bordo di Ω , $\partial\Omega$ è almeno lipschitziano. Considereremo il problema di Dirichlet per il funzionale (1); cioè il problema di minimizzare l'area tra tutte le funzioni con valore al bordo ($\partial\Omega$) dato da $\varphi(x)$. Qui la φ data al bordo è supposta sufficientemente regolare. Lavoreremo in spazi $C^{0,1}(\Omega)$ di funzioni lipschitziane in Ω ; cioè funzioni continue con costante di Lipschitz finita

$$|u|_{\Omega} = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}; x, y \in \Omega, x \neq y \right\}$$

Definizione: Per $k > 0$ sia

$$L_k(\Omega) = \{u \in C^{0,1}(\Omega) : |u|_{\Omega} \leq k\}.$$

Inoltre, se $\varphi \in C^{0,1}(\partial\Omega)$:

$$L_k(\Omega, \varphi) = \{u \in L_k(\Omega) : u = \varphi \text{ su } \partial\Omega\}$$

$$L(\Omega, \varphi) = \{u \in C^{0,1}(\Omega) : u = \varphi \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Proposizione 2.1 *Sia φ una funzione lipschitziana su $\partial\Omega$, e supponiamo che $L_k(\Omega, \varphi) \neq \emptyset$. Allora la funzione $A(u, \Omega)$ raggiunge il suo minimo in $L_k(\Omega, \varphi)$.*

Dimostrazione: Sia $\{u_k\}$ una successione minimizzante in $L_k(\Omega, \varphi)$. Dal teorema di Ascoli-Arzelà (vedi appendice) possiamo scegliere una sottosuccessione che converga uniformemente ad una funzione $u \in L_k(\Omega, \varphi)$, e il risultato segue dalla semicontinuità dell'area (per maggiori dettagli rimandiamo a [GE84]).

□

Denoteremo con u^k la funzione minimizzante in $L_k(\Omega, \varphi)$ (che è unica dalla stretta convessità di A).

Proposizione 2.2 *Sia u^k il punto di minimo per A in $L_k(\Omega, \varphi)$. Se $|u^k|_\Omega < k$, allora u^k minimizza A in $L(\Omega, \varphi)$.*

Dimostrazione: Per $0 \leq t \leq 1$ e $v \in L(\Omega, \varphi)$ poniamo

$$v_t = u^k + t(v - u^k).$$

Avremo che $v_t = \varphi$ su $\partial\Omega$ e per t abbastanza piccolo $|v_t| < k$, così che $A(u^k, \Omega) \leq A(v_t, \Omega)$. Dalla convessità di A otteniamo

$$A(u^k, \Omega) \leq A(v_t, \Omega) \leq (1-t)A(u^k, \Omega) + tA(v, \Omega)$$

e quindi $A(u^k, \Omega) \leq A(v, \Omega)$.

□

Questo risultato ci dice che per provare l'esistenza di un minimo in $L(\Omega, \varphi)$ è sufficiente ottenere una stima per la costante di Lipschitz di u^k .

Per semplificare la notazione ometteremo l'indice k ; inoltre diremo più brevemente “ u minimizza l'area in $L_k(\Omega)$ ” invece di “ $u \in L_k(\Omega)$ minimizza A tra tutte la v prese con lo stesso valore al bordo”.

Definizione: Una funzione $w \in L_k(\Omega)$ si chiama *soprasoluzione* [risp. *sottosoluzione*] per A in $L_k(\Omega)$ se per ogni $v \in L_k(\Omega, w)$, con $v \geq w$ [$v \leq w$] abbiamo $A(v, \Omega) \geq A(w, \Omega)$.

In particolare una funzione minimizzante l'area in $L_k(\Omega)$ è sia sopra che sottosoluzione.

Dal seguente “principio del massimo” risulterà che il controllo al bordo di sopra e sottosoluzioni implicherà il controllo all'interno.

Lemma 2.1 (*Principio del massimo debole*): *Siano w e z rispettivamente una soprasoluzione e una sottosoluzione in $L_k(\Omega)$. Se $w \geq z$ su $\partial\Omega$, allora $w \geq z$ in $\bar{\Omega}$.*

Dimostrazione: Supponiamo il contrario, che

$$K = \{x \in \Omega : w(x) < z(x)\}$$

è non vuoto, e sia $v = \max\{z, w\}$. Avremo che $v \in L_k(\Omega, w)$ e $v \geq w$; quindi $A(v, \Omega) \geq A(w, \Omega)$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 &\geq A(w, \Omega) - A(v, \Omega) = \\ &= \int_{\Omega-K} \sqrt{1 + |Dw|^2} + \int_K \sqrt{1 + |Dw|^2} - \int_{\Omega-K} \sqrt{1 + |Dv|^2} - \int_K \sqrt{1 + |Dv|^2} = \\ &= A(z, K) = A(w, K). \end{aligned}$$

In modo simile prendendo $v = \min\{z, w\}$ mostriamo che $A(w, K) \geq A(z, K)$ e quindi

$$A(w, K) = A(z, K).$$

Da $w = z$ su $\partial\Omega$ e $z > w$ in K dobbiamo avere $Dz \neq Dw$ in un insieme a misura positiva. Dalla stretta convessità dell'area abbiamo

$$A\left(\frac{w+z}{2}, K\right) < \frac{1}{2}A(w, K) + \frac{1}{2}A(z, K) = A(w, K)$$

Ma questo è impossibile perchè w è soprasoluzione in $L_k(\Omega)$ e quindi

$$A\left(\frac{w+z}{2}, K\right) \geq A(w, K).$$

□

Una semplice conseguenza del principio del massimo è il seguente lemma.

Lemma 2.2 *Siano w e z rispettivamente una soprasoluzione e una sottosoluzione in $L_k(\Omega)$. Allora*

$$\sup_{x \in \Omega} [z(x) - w(x)] = \sup_{y \in \partial\Omega} [z(y) - w(y)] \quad (2)$$

Dimostrazione: È sufficiente osservare che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, $w + \alpha$ è una supersoluzione, e che per $x \in \partial\Omega$:

$$z(x) \leq w(x) + \sup_{y \in \partial\Omega} [z(y) - w(y)].$$

Il risultato segue dal Lemma 2.1. □

In particolare, se u e v minimizzano l'area in $L_k(\Omega)$, (2) vale anche per $u - v$ e $v - u$ e perciò

$$\sup_{\Omega} |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|. \quad (3)$$

Verificheremo ora che il modulo di lipschitzianità $|u|_{\Omega}$ delle superfici minime, è raggiunto quando almeno uno dei punti candidati è sul bordo, cioè:

Lemma 2.3 (*Riduzione di stime al bordo*): *Supponiamo che u minimizzi l'area in $L_k(\Omega)$. Allora*

$$|u|_{\Omega} = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} : x \in \Omega, y \in \partial\Omega \right\}. \quad (4)$$

Dimostrazione: Siano $x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2$ e sia $\tau = x_2 - x_1$. La funzione

$$u_{\tau}(x) = u(x + \tau)$$

minimizza l'area in $L_k(\Omega_{\tau})$, dove

$$\Omega_{\tau} = \{z \in \mathbf{R}^n : z + \tau \in \Omega\}.$$

L'insieme $\Omega \cap \Omega_{\tau}$ è non vuoto (contiene almeno x_1) e sia u che u_{τ} minimizzano l'area in $L_k(\Omega \cap \Omega_{\tau})$. Da (3) concludiamo che esiste $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_{\tau})$ tale che

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_{\tau}(x_1)| \leq |u(z) - u_{\tau}(z)| = |u(z) - u(z + \tau)|.$$

D'altra parte almeno uno dei punti $z, z + \tau$ appartiene a $\partial\Omega$ (infatti, $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_{\tau}) \subseteq \partial\Omega \cup \partial\Omega_{\tau}$ quindi, se z non è in $\partial\Omega$, allora $z \in \partial\Omega_{\tau}$ cioè $z + \tau \in \partial\Omega$). Denotando con L il secondo termine di (4) abbiamo

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

e (4) segue di conseguenza. \square

Dalla Proposizione 2.2 e dal Lemma 2.3 segue che per provare l'esistenza di un minimo è necessaria solo una stima di $|u(x) - u(y)|$ quando $y \in \partial\Omega$. Otterremo questo per mezzo del Lemma 2.1, comparando u con opportune sopra e sottosoluzioni.

Per $x \in \Omega$ denotiamo con $d(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega$. Inoltre definiamo per $t > 0$:

$$\Sigma_t = \{x \in \Omega : d(x) < t\}$$

$$\Gamma_t = \{x \in \Omega : d(x) = t\} = \partial\Sigma_t \cap \Omega.$$

Definizione: Sia φ una funzione lipschitziana in $\partial\Omega$. Una barriera superiore v^+ (relativa a φ) è una funzione lipschitziana definita in un aperto Σ_{t_0} , $t_0 > 0$, che soddisfa:

$$v^+ = \varphi \text{ su } \partial\Omega; \quad v^+ \geq \sup_{\partial\Omega} \varphi \text{ su } \Gamma_{t_0} \quad (5)$$

$$v^+ \text{ una soprasoluzione in } \Sigma_{t_0}. \quad (6)$$

In modo analogo una barriera inferiore è una sottosoluzione v^- in Σ_{t_0} , con $v^- = \varphi$ su $\partial\Omega$, e $v^- \leq \inf_{\partial\Omega} \varphi$ su Γ_{t_0} .

Notiamo ora che le superfici minime raggiungono il loro massimo (e minimo) sul bordo.

Lemma 2.4 *Sia u la funzione che minimizza l'area in $L_k(\Omega, \varphi)$, allora, per ogni $x \in \Omega$,*

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi.$$

Dimostrazione: Supponiamo sia vero il contrario e definiamo $v(x) := \min\{u(x), \sup_{\partial\Omega} \varphi\}$. Notiamo che $|v|_\Omega \leq |u|_\Omega \leq k$, e sappiamo che $v = \varphi$ su $\partial\Omega$ e quindi $A(v) \geq A(u)$. Inoltre

$$A(u) = \int_{u \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{u > \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1 + |Du|^2},$$

$$A(v) = \int_{u \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{u > \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1}.$$

I primi membri a destra delle due uguaglianze sono uguali, quindi segue che

$$\int_{u > \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1} \geq \int_{u > \sup_{\partial\Omega} \varphi} \sqrt{1 + |Du|^2}$$

ma $|Du|^2 \geq 0$ e quindi vale l'uguaglianza. Perciò $Du = 0$ su $\{x \in \Omega : u > \sup_{\partial\Omega} \varphi\}$ da cui $u = c = \text{cost}$ su $\{x \in \Omega : u > \sup_{\partial\Omega} \varphi\}$ e $u = \sup_{\partial\Omega} \varphi$ su $\{x \in \Omega : u > \sup_{\partial\Omega} \varphi\}$ da cui l'assurdo (stessa cosa per l'altro segno). \square

L'esistenza di barriere garantisce l'esistenza di superfici minime:

Teorema 2.1 *Sia φ una funzione lipschitziana su $\partial\Omega$, e supponiamo che lí esistano una barriera superiore e inferiore relative a φ . Allora la funzione area raggiunge il suo minimo in $L(\Omega, \varphi)$.*

Dimostrazione: Fissiamo $Q \geq [v^\pm]_{\Sigma_{t_0}}$ cioè $Q \geq |v^+| + |v^-| + \text{osc}_{\partial\Omega}\varphi/t_0$ (dove con $|v|$ indichiamo la costante di Lipschitz di v , e $\text{osc} = \text{sup} - \text{inf}$) e sia $k > Q$. Sia u la funzione che dà il minimo per A in $L_k(\Omega, \varphi)$. La funzione u minimizza l'area in $L_k(\Sigma_{t_0}, \varphi)$ e per ogni $x \in \Omega$, grazie al Lemma 2.4:

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi, \quad (7)$$

In particolare, da (5), $v^-(x) \leq u(x) \leq v^+(x)$ su Γ_{t_0} , e quindi, dal Lemma 2.1 e da (6):

$$v(x)^- \leq u(x) \leq v^+(x) \text{ in } \Sigma_{t_0}.$$

Da ciò e dal fatto che $u = v^+ = v^-$ su $\partial\Omega$, abbiamo allora

$$|u(x) - u(y)| \leq Q|x - y| \quad (8)$$

per ogni $x \in \Sigma_{t_0}$, $y \in \partial\Omega$. D'altra parte se $y \in \partial\Omega$, $x \in \Omega$ e $d(x) > t_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq v^+(x) - v^+(y) \leq |v^+||x - y|, \\ u(y) - u(x) &\leq v^-(y) - v^-(x) \leq |v^-||x - y|, \end{aligned}$$

inoltre grazie a (7)

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq \sup_{\partial\Omega} \varphi - \varphi(y), \\ \inf_{\partial\Omega} \varphi - \varphi(y) &\leq u(x) - u(y), \end{aligned}$$

e quindi

$$|u(x) - u(y)| \leq \max \left\{ \sup_{\partial\Omega} \varphi - u(y), u(y) - \inf_{\partial\Omega} \varphi \right\} \leq Qt_0,$$

(dove Q è stato definito sopra), perciò (8) è verificata per ogni $x \in \Omega$. Dal Lemma 2.3 abbiamo $|u|_\Omega \leq Q < k$ e la conclusione segue immediatamente dalla Proposizione 2.2. \square

Cerchiamo ora le condizioni sotto le quali la costruzione delle *barriere* è possibile. Discuteremo solo il caso della barriera superiore, poichè se w è una barriera superiore relativa a $-\varphi$, $-w$ sarà una barriera inferiore per φ .

Lemma 2.5 Sia $v(x)$ una funzione di regolarità C^2 e soprasoluzione in un aperto Σ . Allora, se definiamo

$$\varepsilon(v) = (1 + |Dv|^2)\Delta v - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij},$$

si ha $\varepsilon(v) \leq 0$ in Σ .

Dimostrazione: Sia $\eta \geq 0$ a supporto compatto in Σ . La funzione $g(t) = A(v + t\eta, \Sigma)$ ha minimo per $t = 0$, perciò $g'(0) \geq 0$. Questo significa che

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Sigma} \frac{D_i v}{\sqrt{1 + |Dv|^2}} D_i \eta \, dx \geq 0,$$

e quindi, integrando per parti:

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{D_i v}{\sqrt{1 + |Dv|^2}} \leq 0 \text{ in } \Sigma.$$

Scrivendo piú esplicitamente:

$$\varepsilon(v) = (1 + |Dv|^2)\Delta v - \sum_{i,j=1}^n v_i v_j v_{ij} \leq 0. \quad (9)$$

□

Lemma 2.6 Sia $v \in C^2$ e sia verificata la (9), allora è soprasoluzione.

Dimostrazione: La diseuguaglianza (9) implica che $g'(0) \geq 0$, dove $g'(t)$ è definita nel Lemma precedente. Quindi, per la convessità dell'area, segue che v è soprasoluzione. □

Esaminiamo ora il seguente

Esempio: Sia $\Omega = B_1$ la palla unitaria in \mathbf{R}^2 , e $\varphi \in C^2(\partial B_1)$. Dimostriamo che esiste soluzione al problema delle superfici minime in B_1 .

Cominciamo col cercare una barriera superiore della forma:

$$v(x) = \varphi(x) + \psi(d(x)),$$

dove d è la funzione distanza $d(x) = 1 - |x|$, e $\psi \in C^2[0, R]$ tale che $\psi(0) = 0$, $\psi'(t) \geq 1$, $\psi''(t) < 0$ e $\psi(R) \geq L = 2 \sup_{B_1} |\varphi|$, con $R < t_0$ (ad esempio $t_0 = 1/2$).

Notiamo che la condizione (5) è soddisfatta per Γ_R e che $\Sigma_{t_0} = B_1 - B_R$ (vedi (6)).

Ricordando che

$$\partial_i|x| = \frac{x_i}{|x|} \text{ e } \partial_{ij}|x| = \frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_i x_j}{|x|^3}$$

cerchiamo di verificare (9). Se calcoliamo

$$D_i v = D_i \varphi - \psi' \frac{x_i}{|x|}, \quad D_{ij} v = D_{ij} \varphi - \psi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \psi' \frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_i x_j}{|x|^3}$$

$$|Dv|^2 = |D\varphi|^2 + \psi'^2 - \frac{2\psi'}{|x|} \sum_i D_i \varphi x_i,$$

$$\Delta v = \Delta \varphi + \psi'' - \psi' \frac{n-1}{|x|},$$

sostituendo in (9) abbiamo:

$$\left(1 + |\nabla \varphi|^2 + \psi'^2 - \frac{2\psi'}{|x|} \sum_i x_i\right) \left(\Delta \varphi + \psi'' - \psi' \frac{n-1}{|x|}\right) - \sum_{i,j} \left(\partial_i \varphi - \psi' \frac{x_i}{|x|}\right) \left(\partial_j \varphi - \psi' \frac{x_j}{|x|}\right) \left(\partial_{ij} \varphi - \psi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \psi' \frac{\delta_{ij}|x|^2 - x_i x_j}{|x|^3}\right).$$

Se esplicitiamo (ricordando che $\psi' \geq 1$ e $\psi'' < 0$), con qualche conto, si arriva alla stima

$$\varepsilon(v) \leq \psi'' + C\psi'^2.$$

Ora, scegliendo

$$\psi(\theta) = 2R \log(1 + R^2 \theta),$$

si verifica la (9) (grazie alla diseuguaglianza di sopra), e inoltre si ha:

$$\psi'(\theta) = 2R \frac{R^2}{1 + R^2 \theta} = \frac{2R^3}{1 + R^2 \theta} \geq \frac{2R^2}{1 + R^3 \theta} > 1,$$

e

$$\psi(R) = 2R \log(1 + R^3).$$

Abbiamo trovato dunque una barriera superiore (si procede analogamente per la barriera inferiore), quindi, per il Teorema 2.1, segue che esiste minimo per la funzione area in $L(B_1, \varphi)$. \square

In modo analogo se Ω è un aperto qualsiasi con bordo C^2 .

Cerchiamo di sottolineare l'idea che c'è dietro questo esempio. Abbiamo costruito la barriera superiore prendendo il dato al bordo φ , e ci si è mossi all'interno in maniera sufficientemente ripida ($\psi' \geq 1$, per soddisfare la (5)) e con la giusta concavità ($\psi'' < 0$, per verificare la (6)).

3 Il teorema di Bernstein (caso $n = 2$)

Intorno al 1910, S.N. Bernstein dimostrò che le uniche soluzioni dell'equazione di superfici minime su \mathbf{R}^2 sono le costanti e i polinomi di primo grado. La dimostrazione che qui presentiamo è dovuta a K.Jörgens e J.C.Nitsche (anni '50, [NJ57]). Purtroppo non è estendibile a dimensioni più alte, per le quali bisognerà aspettare il 1962 con Fleming (vedi [Fwh62]). Fleming legò l'esistenza di una soluzione non banale (cioè affine) dell'equazione di superfici minime in tutto \mathbf{R}^n , con l'esistenza di coni minimi singolari in \mathbf{R}^{n+1} . Successivamente Simons [SJ68] dimostrò la non esistenza di coni minimi singolari in \mathbf{R}^7 e così si ottenne l'estensione del teorema di Bernstein a funzioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{R} con $n \leq 7$; cioè

Teorema 3.1 *Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una soluzione, definita su tutto \mathbf{R}^n , dell'equazione di superfici minime, con $n \leq 7$. Allora f è affine.*

Passiamo ora alla dimostrazione del caso $n = 2$ (prendiamo spunto dalla struttura di [FiA04]).



Alessio Figalli

Teorema 3.2 *Sia $f(x, y)$ una soluzione C^2 dell'equazione delle superfici minime nel piano:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0. \quad (10)$$

Allora f è affine.

Dimostrazione: Notiamo che con qualche calcolo la (10) può essere riscritta come

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (11)$$

Mostriamo che da quest'ultima segue l'esistenza di una funzione $\Phi(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ \Phi_{xy} &= \frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ \Phi_{yy} &= \frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Infatti: se definiamo tre funzioni A , B e C esiste una Φ tale che

$$D^2\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

se e soltanto se

$$\partial_y A = \partial_x B \quad \text{e} \quad \partial_x B = \partial_y C. \quad (*)$$

Prendiamo A , B e C come i membri di sinistra di (12), e calcoliamo le derivate usando (11) per verificare (*). Da (12) una Φ così definita verifica l'equazione

$$\det D^2\Phi = \Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 = 1. \quad (13)$$

Ora, se Φ_{xx} e Φ_{yy} fossero costanti, anche f_x e f_y sarebbero costanti (vedi Lemma seguente) e da qui segue la tesi (cioè f è un polinomio di primo grado in x e y). Non ci rimane che verificare il seguente Lemma.

Lemma 3.1 *Se $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^2)$ verifica la (13) in tutto il piano, allora è un polinomio di secondo grado (ovvero la matrice hessiana è costante).*

Dimostrazione: Notiamo che Φ è convessa, dal momento che il determinante della matrice hessiana è pari ad 1 e la traccia è positiva, da (12). Consideriamo la mappa $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$\xi(x, y) = x + \Phi_x(x, y)$$

$$\eta(x, y) = y + \Phi_y(x, y)$$

Si vuole dimostrare che F è un diffeomorfismo di \mathbf{R}^2 in sé. Poiché

$$DF = \begin{pmatrix} 1 + \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{xy} & 1 + \Phi_{yy} \end{pmatrix}$$

Dalla (13) si ottiene che $\det(DF) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2 > 0$, quindi F è un diffeomorfismo locale (vedi appendice). L'iniettività di F segue dalla convessità di Φ :

$$\begin{aligned} F(v) = F(w) &\Rightarrow v + \nabla\Phi(v) = w + \nabla\Phi(w) \Rightarrow v - w = \nabla\Phi(w) - \nabla\Phi(v) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \langle \nabla\Phi(v) - \nabla\Phi(w), v - w \rangle = - \|v - w\|^2 \Rightarrow v = w. \end{aligned}$$

Per dimostrare la surgettività di F , fissiamo $w \in \mathbf{R}^2$ e consideriamo la funzione $g_w : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ data da

$$g_w(v) = \frac{\|v\|^2}{2} + \Phi(v) - \langle v, w \rangle.$$

Dalla convessità di Φ segue che g_w avrà un unico punto di minimo \tilde{v} e in questo punto si ha

$$0 = \nabla g_w(\tilde{v}) = \tilde{v} + \nabla\Phi(\tilde{v}) - w = F(\tilde{v}) - w.$$

Dunque F è un diffeomorfismo ed esiste $F^{-1} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ di classe C^1 .

Ora, dato $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$ poniamo $\zeta = \xi + i\eta$ e $w(\zeta) = x - \Phi_x(x, y) - i(y - \Phi_y(x, y))$, con $(x, y) = F^{-1}(\xi, \eta)$. Se deriviamo rispetto a ξ e η si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (1 + \Phi_{xx})\partial_\xi x + \Phi_{xy}\partial_\xi y = 1 \\ \Phi_{xy}\partial_\xi x + (1 + \Phi_{yy})\partial_\xi y = 0 \\ (1 + \Phi_{xx})\partial_\eta x + \Phi_{xy}\partial_\eta y = 0 \\ \Phi_{xy}\partial_\eta x + (1 + \Phi_{yy})\partial_\eta y = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$\begin{aligned} \partial_\xi x &= \frac{1 + \Phi_{yy}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2} \\ \partial_\eta x = \partial_\xi y &= \frac{-\Phi_{xy}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2} \\ \partial_\eta y &= \frac{1 + \Phi_{xx}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + 2}. \end{aligned}$$

Da qualche conto (per maggiori dettagli si veda [MM]) si verifica che w è una funzione olomorfa ($\partial_\xi w(\zeta) = -i\partial_\eta w(\zeta)$), quindi anche w' è olomorfa (si veda [RC06]). Inoltre siccome

$$w'(\zeta) = \frac{\Phi_{yy} - \Phi_{xx}}{2 + \Phi_{xx} + \Phi_{yy}} + i \frac{2\Phi_{xy}}{2 + \Phi_{xx} + \Phi_{yy}}$$

utilizzando sempre la (13), si ha

$$|w'(\zeta)|^2 = 1 - \frac{4}{2 + \Phi_{xx} + \Phi_{yy}} = \frac{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - 2}{\Phi_{xx}\Phi_{yy} + 2} < 1$$

da cui per il Teorema di Liouville, w' è costante. Quindi con un piccolo calcolo,

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \frac{|1 - w'|^2}{1 - |w'|^2} = c_1 \\ \Phi_{yy} &= \frac{|1 + w'|^2}{1 - |w'|^2} = c_2. \end{aligned}$$

Da ciò segue che Φ è un polinomio di secondo grado, grazie al seguente ragionamento:

Sappiamo che Φ_{xx} , Φ_{yy} (e quindi Φ_{xy} da (13)) sono costanti. Siano $\Phi_{xx} = c_1$, $\Phi_{yy} = c_2$, $\Phi_{xy} = c_3$, usando la (12) ed esplicitando i termini in f :

$$c_1 \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = f_x^2 + 1,$$

$$c_2 \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = f_y^2 + 1,$$

$$c_3 \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = f_x f_y.$$

Da ciò si osserva che i tre termini a destra delle uguaglianze differiscono per una costante moltiplicativa. Allora si ha

$$f_x^2 + 1 = k_1(f_y^2 + 1) = k_2 f_x f_y.$$

Posso scrivere quindi

$$f_x^2 = k_1 f_y^2 + k_1 - 1, \quad f_x^2 = k_2 f_x f_y - 1,$$

esplicitando f_x in funzione di f_y^2 dalla prima e sostituendo nella seconda, si ottiene un'equazione di secondo grado in f_y^2 che ha come soluzione $f_y^2 = \text{costante}$; da qui segue che anche f_x è costante. \square

4 La congettura di De Giorgi (caso $n = 2$)

Un problema ancora aperto nella sua generalità e legato al problema di Bernstein, è la congettura di De Giorgi. Nel 1978 De Giorgi (in *Convergence problems for functionals and operators* [DG79]) propose la seguente congettura

Congettura. *Sia $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ una soluzione dell'equazione*

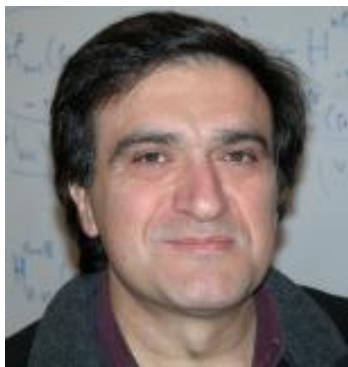
$$\Delta u = u^3 - u,$$

tale che

$$|u| \leq 1, \quad \partial_n u > 0,$$

in tutto \mathbf{R}^n . È vero che per ogni $\lambda > 0$, gli insiemi di livello $\{u = \lambda\}$ sono iperpiani, almeno se $n \leq 8$?

Un primo risultato parziale fu provato da Modica e Mortola, che dimostrarono la congettura nel caso $n = 2$ sotto l'ipotesi che gli insiemi di livello delle soluzioni u fossero grafici di una famiglia equilipschitziana di funzioni.



Nassif Ghoussoub

Fu però nel 1997-1998 che, indipendentemente, Berestycki, Caffarelli e Nirenberg [BCN97] e Ghoussoub e Gui [GG98] dimostrarono la congettura nel caso $n = 2$. Ambrosio e Cabré la risolsero poi per $n = 3$ in [AC00].



Luigi Ambrosio

Ricordiamo che i casi $n = 2, 3$ sono risolvibili sotto ipotesi piú generali per il potenziale (basterà $F \in C^2(\mathbf{R})$, per maggiori dettagli rimandiamo a [AAC01]).

Il problema rimane aperto per $n \geq 4$, che è risolvibile con l'aggiunta della seguente ipotesi: $\lim_{x_n \rightarrow \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1$ per ogni $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ [Sa03] (oppure [VSS06]). Inoltre il potenziale dovrà essere quello di De Giorgi $F(u) = (1 - u^2)^2/4$.



Henri Berestycki

De Giorgi, per la sua congettura, pone come dimensione critica $n = 8$ probabilmente per il suo legame con Bernstein, secondo il quale ogni grafico minimale di una funzione definita su $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n-1}$ è un iperpiano se $m \leq 7$ ovvero $n \leq 8$ (si veda [CX]). Ricordiamo anche che Bombieri, De Giorgi e Giusti trovarono nel 1969 un esempio di grafico minimale di una funzione di 8 variabili che non è un iperpiano (si veda [BDGG]).

Concludiamo dicendo che lo studio di questa congettura è legato a quello di funzionali usati nella fisica per la teoria dei superconduttori e superfluidi (vedi [GP58-La67]), lo studio dell'influenza tra gas e

solidi (vedi [Ro79-AC79]), in problemi di fluidodinamica (si veda [La67-AC81]), e in cosmologia [CaG95].

Passiamo ora alla dimostrazione della congettura nel caso $n = 2$ (seguiremo [VE] che prende spunto da [FaA03]).

Teorema 4.1 *Supponiamo che $f \in C^1$ e che $u \in C^2$ risolva*

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ in } \mathbf{R}^2, & |u| \leq 1 \\ \partial_2 u > 0. \end{cases}$$

Allora $\exists g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $\nu \in S^1$ tale che $u(x) = g(x \cdot \nu)$

Dimostrazione:

Per prima cosa passeremo alle coordinate complesse per il gradiente da cui seguirà la limitatezza dell'argomento; successivamente useremo un teorema di “tipo-Liouville” dovuto a [BCN97], che ci porterà poi alla conclusione che u è costante lungo la direzione di un vettore prescelto.

PASSO 1: COORDINATE COMPLESSE PER ∇u .

Sia $\nabla u = \partial_1 u + i\partial_2 u = z = \rho e^{i\theta} \in \mathbf{C}$.

Derivando l'equazione si ha

$$\Delta(\partial_k u) = f'(u)\partial_k u \quad \text{per } k = 1, 2,$$

quindi

$$\Delta z = f'(u)z. \tag{14}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \partial_k z &= \partial_k \rho e^{i\theta} + i\rho \partial_k \theta e^{i\theta}, \\ \partial_{kk} z &= \rho e^{i\theta} + 2i\partial_k \rho \partial_k \theta e^{i\theta} + i\rho \partial_{kk} \theta e^{i\theta} - \rho |\partial_k \theta|^2 e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Quindi, da (14)

$$\Delta \rho + 2i\nabla \rho \cdot \nabla \theta + i\rho \Delta \theta - \rho |\nabla \theta|^2 = f'(u)\rho$$

Prendiamone la parte immaginaria,

$$2\nabla \rho \cdot \nabla \theta + \rho \Delta \theta = 0.$$

Moltiplicando per ρ ,

$$0 = 2\rho\nabla\rho \cdot \nabla\theta + \rho^2\Delta\theta = \operatorname{div}(\rho^2\nabla\theta). \quad (15)$$

Notiamo che $\rho^2 = |\nabla u|^2 \leq \text{costante}$ da stime ellittiche (si veda, ad esempio, Theorem 3.13 in [HL]), inoltre $0 < \partial_2 u = \rho \sin \theta$ dice che $\sin \theta > 0$, quindi θ è limitato (per la continuità di θ).

PASSO 2: TEOREMA DI “TIPO-LIOUVILLE”

$$\operatorname{div}(a\nabla v) = 0 \text{ in } \mathbf{R}^2$$

$a > 0$, $a, |v|$ limitati $\Rightarrow v = \text{costante}$

Infatti: sia τ una funzione di taglio, $\tau = 1$ in B_R e $\tau = 0$ fuori B_{2R} , con $|\nabla\tau| \leq \frac{C_1}{R}$, C_1 indipendente da R . Sia $\eta := v\tau^2$. Allora, dall'equazione di sopra segue che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbf{R}^2} a\nabla v \cdot \nabla\eta = \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} a\tau^2 |\nabla v|^2 + \int_{B_{2R}-B_R} 2av\tau\nabla v \cdot \nabla\tau. \end{aligned}$$

Da Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\mathbf{R}^2} a\tau^2 |\nabla v|^2 \leq \left(\int_{B_{2R}-B_R} a\tau^2 |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{2R}-B_R} av^2 |\nabla\tau|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo a e v limitati, $|B_{2R} - B_R| \leq C_2R^2$ (perchè siamo in \mathbf{R}^2), segue che

$$\int_{\mathbf{R}^2} a\tau^2 |\nabla v|^2 \leq k_1 \left(\int_{B_{2R}-B_R} a\tau^2 |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

In particolare,

$$\int_{B_{2R}} a\tau^2 |\nabla v|^2 \leq k_2 \left(\int_{B_{2R}} a\tau^2 |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

quindi,

$$\left(\int_{B_{2R}} a\tau^2 |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq k_3$$

per ogni R , cioè $a\tau^2 |\nabla v|^2 \in \mathbf{L}^1$ (con k_1, k_2 e k_3 costanti). Da ciò,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^2 - B_R} a\tau^2 |\nabla v|^2 = 0. \quad (17)$$

Da (16) e (17),

$$\int_{\mathbf{R}^2} a\tau^2 |\nabla v|^2 = 0.$$

Quindi $\nabla v = 0$, cioè $v = \text{costante}$.

PASSO 3: CONCLUSIONI

Dai passi 1 e 2, segue che $\theta = \theta_0 = \text{costante}$. Sia $\nu = e^{i\theta_0}$, allora $\nabla u = \rho e^{i\theta} = |\nabla u| \nu$. Sia $\omega \perp \nu$, allora $\partial_\omega u = \nabla u \cdot \omega = |\nabla u| \nu \cdot \omega = 0$, cioè u è costante in direzione di ω . \square

5 Problema isoperimetrico

Veniamo ora al classico problema isoperimetrico, per il quale daremo tre differenti dimostrazioni. Dapprima lo risolveremo con un approccio puramente geometrico dovuto a Steiner (si veda [DAM]); successivamente con la Serie di Fourier (entrambi sono validi in dimensione due), per poi arrivare infine alla “dimostrazione della diseguaglianza isoperimetrica secondo Cabré” (valido per tutte le dimensioni).

Problema Isoperimetrico: assegnata una lunghezza $L > 0$, tra tutte le curve piane chiuse di lunghezza L , trovare quella che racchiude area maggiore.

Consideriamo inoltre

Problema di Didone: data una retta R e assegnata una lunghezza $L > 0$, tra tutte le curve piane che hanno entrambi gli estremi sulla retta R , trovare quella che racchiude area maggiore.

Seguendo un approccio puramente geometrico si può arrivare alle seguenti osservazioni:

- *La regione A racchiusa da una curva γ deve essere convessa.*
- *Per risolvere il problema isoperimetrico, basta risolvere il Problema di Didone e raddoppiare la figura ottenuta.*
- *Se una soluzione del problema esiste essa è una circonferenza.*

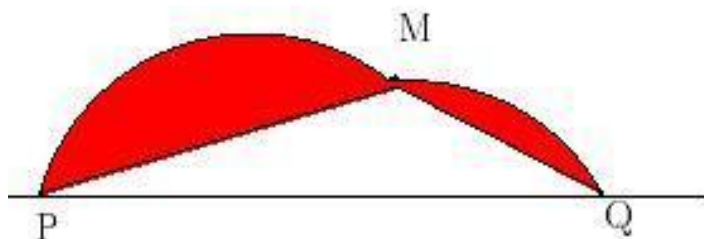
Le prime due osservazioni sono banali perchè, se la regione ha rientranze è sempre possibile deformare la figura fino ad ottenerne una di area maggiore e perimetro non superiore alla lunghezza di γ . Dimostriamo quindi l'ultima osservazione e consideriamo il problema di Didone.

5.1 Soluzione del problema isoperimetrico secondo Steiner.

Chiamiamo P e Q gli estremi del segmento di base che coincidono con gli estremi della curva γ . Prendendo un punto M su γ facciamo vedere che l'angolo PMQ è retto; perchè ogni punto M sul semicerchio di diametro PQ ha questa proprietà.

Preso il punto M sulla curva eseguiamo un'operazione che viene chiamata “manovra di Steiner”: immaginiamo che in M ci sia una cerniera e che la zona tra la curva e il triangolo PMQ sia fatta di due pezzi incernierati in M . Allargando o restringendo l'angolo in

M , la lunghezza della curva non cambia, mentre varia l'area tra la curva e il segmento PQ . Ovvero i pezzi incernierati restano uguali e varia l'area del triangolo PMQ . Quindi dobbiamo verificare che l'area del triangolo è massima quando l'angolo in M è retto.



Manovra di Steiner

Fissiamo ora le lunghezze di due lati del triangolo (ipotizziamo che uno dei due sia la base) e facciamo variare l'angolo fra i due lati. L'area massima si ottiene per il triangolo rettangolo (quindi l'angolo retto) perchè ha l'altezza massima. La dimostrazione è terminata.

Passiamo ora ai quadrilateri e poi più in generale agli n -goni.

Teorema 5.1 *Tra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato, il quadrato ha area massima.*

Dimostrazione: Supponiamo di avere un quadrilatero di lati a, b, c e d , e angoli α (tra c e d), β (tra d e c), γ (tra d e a), e δ (tra a e b) e siano S e $P = (a + b + c + d)$ la sua area e perimetro. Dal teorema dei seni si ha

$$S = \frac{1}{2} (ab \sin \delta + cd \sin \beta) = \frac{1}{2} (bc \sin \alpha + ad \sin \gamma),$$

sommando e dividendo otteniamo la relazione

$$S = \frac{1}{4} (ab \sin \delta + cd \sin \beta + bc \sin \alpha + ad \sin \gamma).$$

Senza variare il perimetro effettuiamo delle disuguaglianze algebriche; ricordando che $|\sin t| \leq 1$ e che $2|x||y| \leq x^2 + y^2 \forall x, y \in \mathbf{R}$.

$$S \leq \frac{1}{4}(ab+cd+bc+ad) = \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{8}(a+c)(b+d) + \frac{1}{8}(a+c)(b+d)$$

$$\leq \frac{1}{16} [(a+c)^2 + (b+d)^2 + 2(a+c)(b+d)] = \frac{1}{16} P^2.$$

Quindi per ogni quadrilatero vale

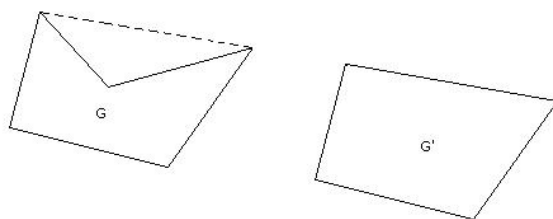
$$16S \leq P^2$$

e le maggiorazioni diventano uguaglianze se e solo se $\alpha = \beta = \delta = \gamma = \pi/2$ e $a = b = c = d$, quindi il caso del quadrato. \square

Passiamo ora agli n -goni:

Dato un n -gono G è possibile costruire un n -gono convesso G' avente area non minore e perimetro non superiore.

Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che, se G è convesso allora $G = G'$ supponiamo quindi il caso che non sia convesso. Sappiamo quindi che se G non è convesso, almeno uno dei segmenti congiungenti due vertici del poligono giace all' esterno dell' figura; quindi tracciamo tutti i segmenti aventi per estremi due vertici considerando solo quelli che giacciono all' esterno del poligono. In questo modo si è costruito un nuovo poligono G' che è convesso per costruzione (visto che ho incorporato almeno un triangolo l'area è aumentata e il suo perimetro diminuito perchè la somma dei 2 lati è maggiore della lunghezza del terzo). Infine se G' non è n -gono basta aggiungere dei vertici fittizi.



Dato G costruisco l' n -gono regolare G'

Teorema 5.2 *Nell'insieme \mathcal{G} degli n -goni convessi aventi perimetro fissato, il massimo dell'area è raggiunto dall' n -gono regolare.*

Dimostrazione: Dato $G \in \mathcal{G}$ costruiremo G' n -gono regolare, prima rendendo uguali tutti i lati e poi tutti gli angoli della figura. Alla fine otterremo l' n -gono regolare con lo stesso perimetro P di G e area maggiore S .

Iniziamo dai lati: Se G ha tutti i lati uguali (P/n) non c'è nulla da dimostrare, quindi supponiamo almeno due lati diversi da P/n . Siano A, B e C tre vertici consecutivi del poligono, e assumiamo che $\overline{AB} < P/n$ e $\overline{BC} > P/n$. Possiamo trovare un punto B' tale che

$$\overline{AB'} = P/n \text{ e } \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB'} + \overline{B'C}.$$

Dobbiamo mostrare che $S(AB'C) > S(ABC)$ usando la formula di Erone per un triangolo di lati a, b e c :

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)} \quad (18)$$

Dalla costruzione segue che:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB'} + \overline{B'C}$$

$$\overline{AB} < \overline{AB'} = P/n < \overline{BC}$$

Quindi segue:

$$\overline{BC} - \overline{AB} > \overline{BC} - \overline{AB'}$$

$$\overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AB'} < \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{BC} - \overline{AB} > \overline{BC} - \overline{AB'} > |\overline{B'C} - \overline{AB'}|.$$

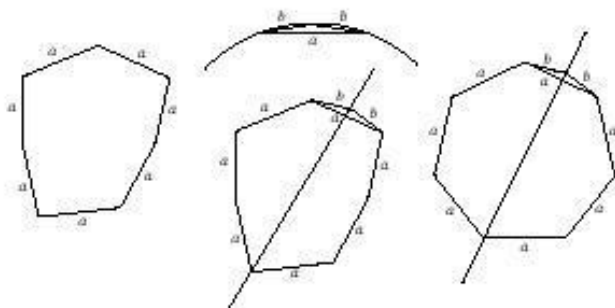
A questo punto confrontiamo l'area dei due triangoli utilizzando la (18)

$$16S^2(ABC) = ((\overline{AB} + \overline{BC})^2 - \overline{AC}^2)(\overline{AC}^2 - (\overline{AB} - \overline{BC})^2),$$

$$16S^2(AB'C) = ((\overline{AB'} + \overline{B'C})^2 - \overline{AC}^2)(\overline{AC}^2 - (\overline{AB'} - \overline{B'C})^2),$$

Si osserva che il primo fattore a destra dell'uguale è lo stesso per entrambi i triangoli, e il secondo è maggiore per il triangolo $AB'C$, da cui segue la disuguaglianza di prima. Ripetendo il ragionamento al più $n - 1$ volte abbiamo ottenuto un nuovo n -gono (G') avente area maggiore e perimetro uguale (infatti, $P(G') = P$, con tutti i lati lunghi $n/2$).

Resta da dimostrare che se rendiamo gli angoli del poligono uguali l'area aumenta. Supponiamo $n = 2k$, e riadattiamo la manovra di Steiner: consideriamo un vertice del poligono e il suo opposto P e Q e tracciamo la diagonale \overline{PQ} . Il poligono viene diviso in due metà, se una delle due è più grande dell'altra basta scegliere quella con area più grande, per riflessione otteniamo un poligono avente area maggiore e perimetro uguale. Se ora utilizziamo la manovra di Steiner e fissiamo un vertice R e portandolo su una circonferenza insieme a Q e P , l'area aumenta senza variare la lunghezza dei lati e gli angoli ad eccezione di $\widehat{P\hat{R}Q}$. Ripetendo il ragionamento per i vertici restanti, si ottiene il poligono regolare.



Manovra di Steiner per l' n -gono

Se $n = 2k+1$ si può utilizzare lo stesso metodo di sopra tracciando una circonferenza che circoscriva il poligono e poniamoci uno dei lati. Costruiamo poi un triangolo isoscele avente il terzo vertice sulla circonferenza, che non intersechi il poligono. Abbiamo così ottenuto un $(2k+2)$ -gono, e possiamo ricondurci al caso di sopra. \square

Utilizzando la trigonometria si può calcolare la relazione tra perimetro e area di un n -gono regolare. Sia G un poligono regolare, e l la lunghezza del suo lato. Vale che $P(G) = nl$, e per il calcolo dell'area consideriamo il triangolo individuato da un lato qualsiasi e dal centro del poligono. Si arriva all'espressione

$$S(G) = n \frac{1}{2} l \frac{l}{2n \tan(\pi/n)} = \frac{P^2(G)}{4n \tan(\pi/n)}.$$

Dal teorema (5.2) ogni altro n -gono ha superficie minore, quindi deve valere la seguente *disuguaglianza isoperimetrica*

$$4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) S(G) \leq P^2(G). \quad (19)$$

A questo punto siamo in grado di risolvere il problema isoperimetrico attraverso la disuguaglianza

$$4\pi S(D) \leq L^2(\partial D)$$

come fatto per il teorema (5.1).

Osserviamo che la disuguaglianza è vera e con il segno di uguale dalla circonferenza. Come visto da Steiner possiamo limitarci a dimostrare il teorema per curve che racchiudono domini convessi.

Per ottenere la lunghezza della frontiera e l'area di un dominio, ci riconduciamo ai poligoni (dei quali sappiamo calcolare area e perimetro). Siano P_1, \dots, P_k punti di frontiera di un generico dominio convesso D e sia G_k il poligono con vertici nei punti indicati. Intuitivamente si può osservare che il perimetro e l'area di G_k sono una buona approssimazione della lunghezza della frontiera e dell'area del dominio, quando k diventa grande. Dal momento che il segmento è la curva più corta che congiunge i vertici e che il poligono è interamente contenuto in D , valgono le relazioni

$$P(G_k) \leq L(\partial D) \quad S(G_k) \leq S(D).$$

Possiamo dire inoltre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(G_k) = L(\partial D), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} S(G_k) = S(D),$$

cioè per k abbastanza grande le aree e i perimetri dei poligoni approssimano le grandezze che ci interessano. Quando cresce k , cioè il numero di punti presi sulla frontiera di D ; questi devono farsi sempre più vicini. Stiamo chiedendo che per $k \rightarrow +\infty$ si ha $\sup_{j=1, \dots, k} |P_j - P_{j-1}| \rightarrow 0$.

Dal teorema (5.2) possiamo affermare

$$4k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) S(G_k) \leq P^2(G_k),$$

poichè $4k \tan(\pi/k) \rightarrow 4\pi$, passando al limite otteniamo

$$4\pi S(D) \leq L^2(\partial D),$$

abbiamo dimostrato quindi il seguente

Teorema 5.3 (Disuguaglianza isoperimetrica) *Sia D un dominio piano, cioè un insieme aperto e convesso, avente come frontiera una curva C^1 a tratti, allora vale*

$$4\pi S(D) \leq L^2(\partial D). \quad (20)$$

L'uguaglianza vale se e solo se D è un cerchio.

5.2 Soluzione del problema isoperimetrico secondo Hurwitz

Adolf Hurwitz fu storicamente il primo a risolvere in modo completo il problema isoperimetrico (1902, vedi [DAM]). La sua semplice dimostrazione utilizza parte della teoria sulle serie di Fourier.



Adolf Hurwitz

Iniziamo col definire γ una curva chiusa e semplice di classe C^1 , sia L la sua lunghezza e S l'area del dominio D racchiuso al suo interno. Dalle applicazioni della formula di Gauss-Green (vedi appendice) per il calcolo dell'area di una figura piana, sappiamo che

$$S = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx),$$

dove la curva è orientata positivamente. Inoltre se γ è parametrizzata dalle equazioni $(x(t), y(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ vale

$$\int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma} x(t)y'(t) dt, \quad \int_{\gamma} y dx = \int_a^b y(t)x'(t) dt.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che la lunghezza della curva sia $L = 2\pi$, che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco e (a meno di sostituire $x(t)$ con $x(t) - c$) che

$$\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0.$$

Avendo parametrizzato γ per lunghezza d'arco, abbiamo

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt,$$

e da qui segue che

$$\begin{aligned} 2(\pi - S) &= \int_0^{2\pi} (|x'(t)|^2 - 2x(t)y'(t) + |y'(t)|^2) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (|x'(t)|^2 - |x(t)|^2) dt + \int_0^{2\pi} (x(t) - y'(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Entrambi gli integrali sono non negativi, il secondo perchè un quadrato, il primo per la disuguaglianza di Wirtinger (il Lemma seguente). Ora se moltiplichiamo per 2π la precedente disuguaglianza, otteniamo

$$4\pi(\pi - S) \geq 0$$

che non è altro

$$4\pi S \leq 4\pi^2 = L^2,$$

cioè la disuguaglianza isoperimetrica.

L'uguaglianza vale se e solo se entrambi gli integrali si annullano. Dalla disuguaglianza di Wirtinger (vedi Lemma seguente) il primo integrale si annulla se e solo se

$$x(t) = A \sin(t) + B \cos(t),$$

e il secondo se e solo se y verifica l'equazione $y' = x$, cioè

$$y(t) = -A \cos(t) + B \sin(t) + C,$$

con C costante. Quindi la disuguaglianza isoperimetrica è un'uguaglianza se e solo se γ è una circonferenza.

Ora ci rimane da dimostrare il seguente

Lemma 5.1 (Wirtinger) *Sia $f \in C^1[0, 2\pi]$ una funzione periodica avente media nulla. Allora*

$$\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt,$$

e l'uguaglianza vale se e soltanto se $f(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$.

Dimostrazione: Sviluppando f in serie di Fourier abbiamo

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Notiamo che il termine $a_0/2$ non c'è perchè la media è nulla. Se deriviamo si ha

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos(kt) - ka_k \sin(kt)).$$

Per l'identità di Parseval (vedi appendice) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} (|f'(t)|^2 - |f(t)|^2) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2)$$

e la dimostrazione è conclusa, perchè il secondo termine è non negativo, ed è nullo solo se $a_k = b_k = 0$ per ogni $k > 1$. \square

5.3 Dimostrazione secondo Cabré

Prima di dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica (Teorema 5.4), esaminiamo i seguenti Lemmi elementari (stiamo seguendo [VE2]).

Il primo Lemma è la famosa disuguaglianza aritmetica-geometrica:

Lemma 5.2 *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. Allora,*

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} \right)^n$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Dimostrazione: Sia $f : \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}$, con $f(x) := x_1 + \cdots + x_n$. Sia $\Phi : \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}$, con $\Phi(x) := x_1 \cdots x_n$. Notiamo che l'insieme $M := \{x \in \mathbf{R}_+^n : \Phi = 1\}$ è un vincolo regolare, perchè: se $x \in M$ è tale che $\nabla \Phi(x) = 0$, segue che $x_i \neq 0 \forall i$, e $0 = x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n = \frac{1}{x_i}$, da cui l'assurdo.

Notiamo inoltre che il $\sup_M f = +\infty$, perchè, se consideriamo il punto $(k, \frac{1}{k}, 1, \dots, 1) \in M$ si ha $f(k, \frac{1}{k}, 1, \dots, 1) \geq k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$. Invece, $\inf_M f$ è raggiunto, perchè: sia $Q := \{x \in \mathbf{R}_+^n, 0 \leq x_i \leq n\}$; allora, se $x \in (\mathbf{R}_+^n - Q) \cap M$, $f(x) \geq n = f(1, \dots, 1)$, da cui $\inf_M f = \inf_{M \cap Q} f$. Per compattezza di $M \cap Q$, segue che $\inf_M f = \min_{M \cap Q} f$ è raggiunto.

Ora studiamo i punti di minimo coi moltiplicatori di Lagrange:

$$1 = \partial_i f(x) = \lambda \partial_i \Phi(x) = \lambda x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n = \frac{\lambda}{x_i}$$

da cui segue che $x_i = \lambda$ e quindi $1 = x_1 \cdots x_n = \lambda^n$, e quindi $x_1 = \cdots = x_n = 1$. Abbiamo dunque che $f(x) \geq n \forall x \in M$, con uguaglianza se e solo se $x = (1, \dots, 1)$.

Sia ora $x_i := \lambda_i / (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}$. Allora $x \in M$ e

$$\left(\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} \right)^n = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{n^n} \cdot (f(x))^n \geq \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

con uguaglianza se e solo se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. \square

Per una dimostrazione alternativa si veda “Proofs from the book” [AZ].

Il prossimo Lemma dà una formula che lega il perimetro della palla di raggio r , con la misura della palla unitaria.

Lemma 5.3

$$H^{n-1}(\partial B_r) = nr^{n-1}L^n(B_1),$$

dove, H^{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale e L^n è la misura di Lebesgue n -dimensionale (si veda [EG]).

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial B_r) &= \left. \frac{d}{d\rho} L^n(B_\rho) \right|_{\rho=r} = \\ &= \left. \frac{d}{d\rho} (\rho^n L^n(B_1)) \right|_{\rho=r} = nr^{n-1}L^n(B_1). \end{aligned}$$

□

Arriviamo ora alla diuguaglianza isoperimetrica valida in tutte le dimensioni.

Teorema 5.4 (Disuguaglianza isoperimetrica) Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato e $\partial\Omega$ regolare: allora,

$$\frac{H^{n-1}(\partial\Omega)^n}{L^n(\Omega)^{n-1}} \geq \frac{H^{n-1}(\partial B_r)^n}{L^n(B_r)^{n-1}}. \quad (21)$$

Dimostrazione: Sia u soluzione del seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = c & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = 1 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (22)$$

con $c := H^{n-1}(\partial\Omega)/L^n(\Omega)$. Nota: la soluzione di questo problema esiste per [Pa92] e [Ev] (per una dimostrazione dettagliata rimandiamo a [TME]).

Sia $|\xi| < 1$ e consideriamo il piano $\pi_{\xi,\lambda,e}$

$$y = \xi \cdot x + \lambda e,$$

dove $\lambda \in \mathbf{R}$, $e \in \mathbf{R}^n$. Muovendo λ , consideriamo il primo punto di contatto da sotto con u , denotato con x_ξ . Tale punto non può essere su $\partial\Omega$, perchè

$$u(x) \geq \xi \cdot x + \lambda e$$

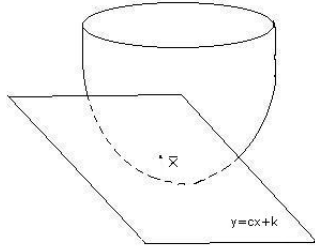
con uguaglianza in x_ξ direbbe, se $x_\xi \in \partial\Omega$, che

$$\xi \cdot (-\nu) \leq -\partial_\nu u(x_\xi) = -1,$$

cioè

$$1 \leq \xi \cdot \nu \leq |\xi| < 1,$$

il che è assurdo.



Punto di contatto tra u e il piano

Quindi x_ξ è interno a Ω e allora $\nabla u(x_\xi) = \xi$. Di conseguenza, se \dot{B}_1 è la palla aperta di \mathbf{R}^n , si ha che $\dot{B}_1 \subseteq \nabla u(M)$, con

$$M := \{x_* \in \Omega : u(x) \geq u(x_*) + \nabla u(x_*) \cdot (x - x_*)\}$$

(M è l'insieme dei punti di contatto). Quindi, $\forall y \in \dot{B}_1$, la misura dell'insieme $\{M \cap \nabla u^{-1}(y)\} = H^0(M \cap (\nabla u)^{-1}(y)) \geq 1$ (si veda [EG]).

Notiamo che $D^2u(x_*) \geq 0 \ \forall x_* \in M$, essendo x_* di contatto da sotto. Quindi, dal Lemma 5.2, se $x_* \in M$

$$|\det D^2u(x_*)| = \det D^2u(x_*) \leq \left(\frac{\text{tr } D^2u(x_*)}{n} \right)^n = \left(\frac{c}{n} \right)^n. \quad (23)$$

(Probabilmente questa tecnica è ispirata a quella di [CC]). Segue allora dalla Formula di Coarea (si veda [EG]) che

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{n} \right)^n L^n(\Omega) &\geq \left(\frac{c}{n} \right)^n L^n(M) \geq \int_M |\det D^2u \, dx| = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} H^0(M \cap (\nabla u)^{-1}(y)) \, dH^n(y) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \int_{\dot{B}_1} H^0(M \cap (\nabla u)^{-1}(y)) dH^n(y) \geq H^n(\dot{B}_1) = L^n(B_1).$$

Quindi dalla definizione di c e dal Lemma 5.3,

$$\frac{H^{n-1}(\partial\Omega)^n}{L^n(\Omega)^{n-1}} \geq n^n L^n(B_1) = \frac{H^{n-1}(\partial B_1)^n}{L^n(B_1)^{n-1}} = \frac{H^{n-1}(\partial B_r)^n}{L^n(B_r)^{n-1}}.$$

□

Notiamo che la disuguaglianza inversa in (21) non è possibile. Infatti se in (21) valesse il segno opposto troveremmo come controesempio il Fiocco di neve di Koch (un frattale), che ha area limitata e perimetro tendente ad infinito (vedi http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake).

Veniamo ora al caso in cui (21) diventa un'uguaglianza.

Teorema 5.5 *Se vale l'uguaglianza in (21), allora $\Omega = B_r(\bar{x})$, per qualche $r > 0$, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$.*

Dimostrazione: Se vale l'uguaglianza in (21), deve valere anche in (23), quindi, per il Lemma 5.2,

$$\partial_{x_1 x_1} u = \dots = \partial_{x_n x_n} u \quad \text{in } M. \quad (24)$$

Inoltre $L^n(M) = L^n(\Omega)$, affinché valga l'uguaglianza. Quindi, usando (22) e (24), segue che

$$\partial_{x_1 x_1} u = \dots = \partial_{x_n x_n} u = \frac{c}{n}.$$

Queste sono n equazioni differenziali ordinarie (ODE's) del secondo ordine, che hanno soluzione:

$$u = \frac{c}{2n}|x|^2 + a \cdot x + b$$

per qualche $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$.

Quindi, su $\partial\Omega$,

$$1 = \partial_\nu u = \frac{c}{n}x \cdot \nu + a \cdot \nu = \frac{c}{n} \left(x + \frac{na}{c} \right) \cdot \nu.$$

Perciò, se $x_0 := -\frac{na}{c}$,

$$|x - x_0| \geq (x - x_0) \cdot \nu = \frac{n}{c}, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

e allora $B_{n/c}(x_0) \subseteq \Omega$.

D'altronde, dal Lemma 5.3 e dall'uguaglianza in (21),

$$\begin{aligned} n^n L^n(B_1) &= \frac{(nL^n(B_1))^n}{L^n(B_1)^{n-1}} = \frac{(H^{n-1}(\partial B_1))^n}{L^n(B_1)^{n-1}} = \\ &= \frac{(H^{n-1}(\partial\Omega))^n}{L^n(\Omega)^{n-1}} = c^n L^n(\Omega), \end{aligned}$$

da cui

$$L^n(B_{n/c}(x_0)) = \left(\frac{n}{c}\right)^n L^n(B_1) = L^n(\Omega).$$

Quindi, $B_{n/c}(x_0) = \Omega$. □

6 Appendice

6.1 Teorema di Ascoli-Arzelà

Teorema 6.1 *Sia X uno spazio metrico, le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

- X è compatto per successioni,
- X è completo e totalmente limitato,
- da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un ricoprimento finito.

Per la dimostrazione si veda [GE03].

Dimostreremo ora il Teorema di *Ascoli-Arzelà* in \mathbf{R} (stiamo facendo riferimento a [GE03]). Una dimostrazione alternativa, valida in \mathbf{R}^n , utilizza il metodo diagonale di Cantor, per la quale rimandiamo a [RS].

Teorema 6.2 (*Ascoli-Arzelà*) *Consideriamo l'insieme $\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_H([a, b])$ delle funzioni $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $|u(x)| \leq H$ e $|u(x) - u(y)| \leq H|x - y|$ per ogni $x, y \in [a, b]$. Allora \mathcal{L}_H è compatto in $L([a, b])$ (insieme delle funzioni limitate in $[a, b]$).*

Dimostrazione: Dal teorema precedente basterà dimostrare che \mathcal{L}_H è chiuso e totalmente limitato.

- Sia $v \in L([a, b])$ un punto di accumulazione di \mathcal{L}_H , e sia u_k una successione in \mathcal{L}_H convergente uniformemente a v . Abbiamo che $|u_k(x)| \leq H$ e $|u_k(x) - u_k(y)| \leq H|x - y|$. Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, dall'uniforme convergenza abbiamo $|v(x)| \leq H$ e $|v(x) - v(y)| \leq H|x - y|$, quindi $v \in \mathcal{L}_H$. Allora \mathcal{L}_H contiene i suoi punti di accumulazione e quindi è chiuso.

- Dimostriamo ora che è totalmente limitato. Dobbiamo far vedere che $\forall \varepsilon > 0$ possiamo trovare un numero finito di funzioni limitate $\varphi_1 \dots \varphi_m$, tali che ogni funzione $u \in \mathcal{L}_H$ dista da una di queste meno di ε . Se questo è verificato, l'unione degli intorni $I(\varphi_s, \varepsilon)$ contiene \mathcal{L}_H .

Procediamo alla costruzione di queste funzioni. Posto $\sigma = \frac{\varepsilon}{H+1}$, prendiamo un intero N tale che $N\sigma \geq H$, e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di intervalli I_1, \dots, I_n , ognuno di ampiezza minore di σ . Le funzioni che considereremo saranno quelle che in ognuno degli intervalli I_s prendono uno dei valori $0, \pm\sigma, \pm 2\sigma, \dots, \pm N\sigma$.

Poiché il numero degli intervalli è n , e per ogni intervallo ci sono $2N + 1$ valori possibili, queste funzioni sono in totale $(2N + 1)^n$, quindi in numero finito.

Sia ora $u(x) \in \mathcal{L}_H$, dobbiamo far vedere che tra le funzioni φ ne esiste una tale che $\|u - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Per ogni intervallo I_s prendiamo un punto x_s . Siccome $-H \leq u(x_s) \leq H$, esisterà un intero k , con $-N + 1 \leq k \leq N$, per cui $(k - 1)\sigma \leq u(x_s) \leq k\sigma$. Prendiamo la funzione φ che vale $k\sigma$ in tutto l'intervallo I_s .

Se $x \in I_s$ si ha:

$$|u(x) - \varphi(x)| \leq |u(x) - u(x_s)| + |u(x_s) - \varphi(x)|.$$

Il primo termine a secondo membro viene maggiorato da $H|x - x_s| < H\sigma$ dato che l'ampiezza di ogni intervallo I_s è minore di σ . Il secondo termine invece è per costruzione minore di σ , quindi $|u(x) - \varphi(x)| < (H + 1)\sigma$ per ogni $x \in I_s$, e di conseguenza

$$\|u - \varphi\|_\infty < (H + 1)\sigma = \varepsilon.$$

□

6.2 Diffeomorfismo locale e alcune considerazioni sulle forme differenziali

Teorema 6.3 (del diffeomorfismo locale): Siano A, B due aperti di \mathbf{R}^n e sia $f \in C^1(A, B)$. Se per $x_0 \in A$ si ha $\det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0$, allora esistono U, V due intorni aperti di x_0 e di $f(x_0)$ tali che $f : U \rightarrow V$ è C^1 con inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ di classe C^1 .

Per la dimostrazione rimandiamo a [GD]

Teorema 6.4 Sia Ω un aperto semplicemente connesso, e siano $A, B, C \in C^1(\Omega)$ tali che $\partial_y A = \partial_x B$ e $\partial_y B = \partial_x C$, $\Rightarrow \exists v \in C^2(\Omega)$ tale che

$$D^2v = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Nota: l'implicazione inversa è ovvia.

Dimostrazione: Definiamo la forma differenziale $Adx + Bdy$, si ha

$$d(Adx + Bdy) = -\partial_y Adx \wedge dy + \partial_x Bdx \wedge dy = 0$$

allora esiste φ tale che

$$d\varphi = A dx + B dy.$$

Con lo stesso ragionamento si arriva a $d(B dx + C dy) = 0$ e quindi all'esistenza di una certa ψ per cui

$$d\psi = B dx + C dy.$$

Da tutto questo segue che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = B = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = C.$$

Se definisco ora una forma differenziale $\varphi dx + \psi dy$ seguirà che

$$d(\varphi dx + \psi dy) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \wedge dy = 0.$$

Allora esisterà una v tale che

$$dv = \varphi dx + \psi dy$$

con $\varphi = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\psi = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Per cui si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = B, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = C. \end{aligned}$$

□

6.3 Formula di Gauss-Green

Se $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ è una forma differenziale di classe C^1 , si ha

$$\int_{\partial E} \omega = \int_E \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$



Carl Friedrich Gauss

Se ∂E è dato da una curva chiusa $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, orientata positivamente, la normale esterna è

$$\nu(t) = (\dot{\eta}_2(t), -\dot{\eta}_1(t)/|\dot{\eta}(t)|),$$

e quindi, se $V : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $V = (V_1, V_2)$,

$$\int_{\partial E} V \cdot \nu ds = \int_0^1 V(\eta(t)) \cdot \nu(t) |\dot{\eta}(t)| dt =$$

$$\int_0^1 (V_1(\eta(t)), V_2(\eta(t))) \cdot (\dot{\eta}_2(t), -\dot{\eta}_1(t)) dt =$$

$$\int_0^1 V_1(\eta(t)) \dot{\eta}_2(t) dt - \int_0^1 V_2(\eta(t)) \dot{\eta}_1(t) dt =$$

$$\int_{\partial E} -V_2 dx + V_1 dy.$$

In particolare, prendendo $M = -V_2$, $N = +V_1$ e usando la formula di Gauss-Green

$$\int_{\partial E} V \cdot \nu ds = \int_E \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = \int_E \operatorname{div} V,$$

cioè l'integrale della divergenza è pari al flusso del vettore V attraverso ∂E . Questa formula prende il nome di **teorema della divergenza** (e vale anche in dimensioni più alte).

Se ora assumiamo $M = 0$ e $N = x$ e usiamo la Formula di Gauss-Green, si ottiene

$$\int_{\partial E} x \, dy = \int_E dx \, dy = m(E)$$

e analogamente se $M = y$ e $N = 0$

$$\int_{\partial E} y \, dx = - \int_E dx \, dy = -m(E).$$

6.4 Diseguaglianza di Bessel

Sia $F(x)$ una funzione integrabile e periodica di periodo 2π , e siano a_k e b_k i suoi coefficienti di Fourier. si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2 \, dx.$$

(per la dimostrazione [GE03])



Friedrich Bessel

Se la funzione $F(x)$ è regolare a tratti e continua, vale il segno di uguale per la diseguaglianza di sopra. Infatti basta passare al limite per $k \rightarrow \infty$ la relazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_k(x)|^2 \, dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

e poiché la serie di Fourier converge totalmente (e quindi uniformemente) alla funzione F , otteniamo **l'identità di Parseval**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx.$$

Riferimenti bibliografici

- [AAC01] Alberti Giovanni, Ambrosio Luigi e Cabré Xavier, *On a long-standing conjecture of De Giorgi: symmetry in 3D for general non-linearities and a local minimality property*, Acta Appl. Math. 65(1-3):9-33, 2001. Special issue dedicated to Antonio Avvantaggiati on the occasion of his 70th birthday.
- [AC00] Ambrosio Luigi e Cabré Xavier, *Entire solutions of semi-linear elliptic equations in \mathbf{R}^3 and a conjecture of De Giorgi*, J.Amer.Math.Soc. 13(2000), no.4, 725-739
- [AC79] Allen S. e Cahn J., *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metallurgica, 27:1084-1095, 1979
- [AC81] Alt H.W. e Caffarelli L.A., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J.Reine Angew. Math., 325:105-144, 1981
- [AZ] Aigner M. e Ziegler G., *Proofs from the book*, Springer
- [BCN97] Berestycki Henri, Caffarelli Luis e Nirenberg Luis, *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa Cl. Sci. (4),25(1-2):69-94 (1998), 1997 dedicated to Ennio De Giorgi
- [BDGG] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., *Minimal cones and the Bernstein problem*, Inv. Math., 7 1969, 243-268
- [BS] Bernstein S., *Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. Soc. Math. de Kharkov (2), 15 1915-1917, 38-45.
- [CaG95] Carbou Gilles, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 12(3):305-318, 1995
- [CC] Caffarelli Luis e Cabré Xavier, *Fully nonlinear elliptic equation*, cap. 3.1
- [CX] Cabré Xavier, *The conjecture of De Giorgi*

- [DAM] D'Ancona Piero e Montefusco Eugenio, *Il dubbio di Didone*, Dip. di Mat. G. Castelnuovo Uni. degli Studi di Roma La Sapienza
- [DG79] De Giorgi Ennio, *Convergence problems for functionals and operators*, In *Proceeding of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome 1978)*, 131-188, Bologna 1979. Pitagora
- [DGF75] De Giorgi Ennio e Franzoni Tullio, *Su ogni tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 58(6):842-850, 1975
- [EG] Evans L.Craig e Gariepy Ronald, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Inc., 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida, 33431
- [Ev] Evans L.C., *Partial Differential Equations* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. xviii+662 pp.
- [FaA03] Farina Alberto, *One-dimensional symmetry for solutions of quasilinear equations in \mathbf{R}^2* , Bollettino UMI 8 6-B 2003, 685-692
- [FiA04] Figalli Alessio, *Il problema di Bernstein e una congettura di De Giorgi*, Tesi di Laurea, 2004
- [Fwh62] Fleming W.H., *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat Palermo (2), 11 1962, 69-90
- [FV] Farina Alberto e Valdinoci Enrico, *Geometry of Quasiminimal Phase Transitions*
- [GD] Guido Daniele, *Note integrative del corso di Analisi Matematica 3*
- [GE03] Giusti Enrico, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, 2003
- [GE84] Giusti Enrico, *Minimal surface and functions of bounded variation*, Monographs in metematics 80, Birkhäuser Boston, 1984

- [GG98] Ghossoud N. e Gui C., *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. 311(3):481-491, 1998
- [GP58] Ginzburg V.L. e Pitaevskii L.P., *On the theory of superfluidity*, Soviet Physics JEPT, 34 (7):858-861, 1958
- [HL] Han Q., Lin F., *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+144 pp.
- [La67] Landau L.D., *Collected papers of L.D.Landau*, Edited and with an introduction by D.ter Haar, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967
- [Ml87] Modica Luciano, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal., 98(2):123-142, 1987
- [MM] Miranda Mario, *Superfici minime e il problema di Plateau*, Uni. di Lecce, dip. di Mat. *Ennio De Giorgi*
- [NJ57] Nitsche J.C.C., *Elementary proof of Bernstein's theorems on minimal surfaces*, Ann. of Math., 66 1957, 543-544
- [Pa92] Pao C.V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992, 98
- [RC06] Rea Claudio, *Funzioni olomorfe*, Appunti del corso di Analisi Reale e Complessa, Università di Roma Tor Vergata, 2006
- [Ro79] Rowlinson J.S., traduzione di J.D.van der Waals, *The thermodynamic theory of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density*, J.Statist. Phys., 20(2)197-244, 1979
- [RS] Reed M. e Simons B., *Methods in modern mathematical physics*, Vol 1, Accademic Press
- [Sa03] Savin Vasile Ovidiu, *Phase transitions: regularity of flat level sets*, PhD thesis, University of Texas at Austin, 2003
- [SJ68] Simons J., *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math (2), 88 1968, 62-105

- [TME] Taylor Michael E., *Partial differential equations I. Basic theory. Applied Mathematical Sciences*, 115 Springer-Verlag, New York, 1996.xxiv+563 pp.
- [VE1] Valdinoci Enrico, *Note corso di dottorando*
- [VE2] Valdinoci Enrico, *Appunti sulla diseguaglianza isoperimetrica secondo Cabré*
- [VSS06] Valdinoci Enrico, Sciunzi Berardino e Savin Vasile Ovidiu, *Flat level set regularity of p -Laplace phase transitions*, Mem. Amer. Math. Soc., 182(858):vi+144, 2006

Un ringraziamento particolarmente sentito a Daniele Guido per le sue utilissime osservazioni, e a Enrico Valdinoci che, accettando di farmi da relatore, ha dato un contributo rilevante alla mia formazione.

Diego Castellaneta